

Exercices Corrigés  
Applications linéaires

**Exercice 1** – On considère l'application linéaire :

$$f : \mathbf{R}^4 \rightarrow \mathbf{R}^2 \quad , \quad (x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto (x_1 + x_2 + x_3 + x_4, x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4) \quad .$$

- 1) Quelle est la matrice de  $f$  dans les bases canoniques de  $\mathbf{R}^2$  et  $\mathbf{R}^4$  ?
- 2) Déterminer le noyau de  $f$ . L'application linéaire  $f$  est-elle injective ?
- 3) Quelle est l'image de  $f$  ? L'application  $f$  est-elle surjective ?
- 4) Soit  $y_1, y_2$  deux réels, préciser un vecteur  $u$  de  $\mathbf{R}^4$  tel que  $f(u) = (y_1, y_2)$ .

**Exercice 2** – Soit  $E$  un  $\mathbf{R}$ -espace vectoriel de dimension 3 et  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$  une base de  $E$ . On considère  $f$  l'application linéaire de  $E$  vers  $E$  telle que :

$$f(e_1) = e_1 + e_2 + e_3, \quad f(e_2) = 2e_1 - e_2 + 2e_3, \quad f(e_3) = 4e_1 + e_2 + 4e_3$$

- 1) Quelle est la matrice  $A$  de  $f$  dans la base  $\mathcal{B}$  ? Si  $u \in E$  a pour coordonnées  $(x_1, x_2, x_3)$  dans la base  $\mathcal{B}$ , quelles sont les coordonnées de  $f(u)$  dans la base  $\mathcal{B}$  ?
- 2) Calculer  $f(e_1 + 2e_2)$ .
- 3) Déterminer le noyau et l'image de  $f$ .
- 4) Ces sous-espaces vectoriels de  $E$  sont-ils supplémentaires ?
- 5) Quelle est la matrice de  $f^2$  dans la base  $\mathcal{B}$  ? En déduire  $f^2(e_1), f^2(e_2), f^2(e_3)$ .

**Exercice 3** – Soit  $E$  un  $\mathbf{R}$ -espace vectoriel de dimension 2 et  $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$  une base de  $E$ . On considère  $f$  l'application linéaire de  $E$  vers  $E$  de matrice dans la base  $\mathcal{B}$  :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

- 1) Préciser  $f(e_1)$  et  $f(e_2)$ . Soit  $a$  un réel, déterminer à l'aide de la matrice  $M$  le vecteur  $f(ae_1 + 17e_2)$ .
- 2) Déterminer le noyau et l'image de  $f$ .
- 3) Soit  $u = 2e_1 - e_2, v = e_1 + e_2$ . Montrer que  $(u, v)$  est une base de  $E$ . Quelle est la matrice de  $f$  dans cette base ?
- 4) Montrer que  $\ker f$  et  $\text{Im} f$  sont des sous-espaces supplémentaires de  $E$ .

**Exercice 4** – Posons  $e_1 = (1, 2)$  et  $e_2 = (1, 3)$ .

- 1) Montrer que  $(e_1, e_2)$  est une base de  $\mathbf{R}^2$ .  
Soit  $f \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^2)$  définie par  $f(e_1) = 2e_2$  et  $f(e_2) = e_1 + 2e_2$ .
- 2) Quelle est la matrice  $B$  de  $f$  dans la base  $(e_1, e_2)$  ?
- 3) Si  $u \in \mathbf{R}^2$  a pour coordonnées  $(X_1, X_2)$  dans la base  $(e_1, e_2)$ , quelles sont les coordonnées de  $f(u)$  dans la base  $(e_1, e_2)$  ?
- 4) Quelle est la matrice  $A$  de  $f$  dans la base canonique de  $\mathbf{R}^2$  ?

**Exercice 5** – On considère l'application  $f : \mathbf{R}^4 \rightarrow \mathbf{R}^3$  définie par :

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_2 + x_3 + x_4, 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4, x_1 - x_2 + x_3 - x_4) \quad .$$

Soit  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$  la base canonique de  $\mathbf{R}^4$  et  $\mathcal{B}' = (\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)$  celle de  $\mathbf{R}^3$ .

- 1) Quelle est la matrice  $A$  de  $f$  dans ces bases canoniques ? Préciser  $f(e_1), f(e_2), f(e_3), f(e_4)$ .
- 2) Donner une base échelonnée de  $\text{Vect}(f(e_1), f(e_2), f(e_3), f(e_4))$  par rapport à la base  $\mathcal{B}'$ .
- 3) En déduire la dimension de l'image de  $f$ , la surjectivité de  $f$  et la dimension du noyau de  $f$ .
- 4) Déterminer une base du noyau de  $f$ .

**Exercice 6** – 1) Soit  $u_1 = (1, 2)$  et  $u_2 = (1, 3)$ . Exprimer  $u_1$  et  $u_2$  dans la base canonique  $(e_1, e_2)$  de  $\mathbf{R}^2$ . Montrer que  $(u_1, u_2)$  est une base de  $\mathbf{R}^2$ .

2) Soit  $f$  l'application de matrice dans la base  $(e_1, e_2)$  :  $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}$ . Calculer  $f(u_1)$  et  $f(u_2)$ . Puis, la matrice  $B$  de  $f$  dans la base  $(u_1, u_2)$ .

3) Quelles sont les matrices de passage de la base  $(e_1, e_2)$  à la base  $(u_1, u_2)$  et de la base  $(u_1, u_2)$  à la base  $(e_1, e_2)$ . Quel est le lien entre  $A$  et  $B$  ?

**Exercice 7** – Soit  $e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1)$  les vecteurs de  $\mathcal{B}$  la base canonique de  $\mathbf{R}^2$ . Posons  $u_1 = (1, 4)$  et  $u_2 = (1, 3)$ .

1) Montrer que  $(u_1, u_2)$  est une base de  $\mathbf{R}^2$  notée  $\mathcal{B}'$ .

Soit  $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ , l'application linéaire de matrice  $A$  dans la base canonique de  $\mathbf{R}^2$  :

$$A = \begin{pmatrix} -7 & 2 \\ -24 & 7 \end{pmatrix} \quad .$$

2) Préciser les vecteurs  $f(e_1)$  et  $f(e_2)$ . Préciser  $f^2$ .

3) Préciser  $f(u_1)$  et  $f(u_2)$ . En déduire la matrice  $B$  de  $f$  dans la base  $\mathcal{B}'$ .

4) Préciser les matrices de passage entre les bases  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$ . Quelles sont les coordonnées des vecteurs  $e_1$  et  $e_2$  dans la base  $(u_1, u_2)$  ? Retrouver la matrice de  $f$  dans la base  $\mathcal{B}'$  en utilisant ces matrices de passage.

5) Montrer que les sous-espaces vectoriels  $\text{Vect}(u_1)$  et  $\text{Vect}(u_2)$  sont supplémentaires. Comparer  $f$  et la symétrie vectorielle  $s$  par rapport à  $\text{Vect}(u_1)$  parallèlement à  $\text{Vect}(u_2)$ .

6) Quelle est la matrice de projection vectorielle  $p$  sur  $\text{Vect}(u_1)$  parallèlement à  $\text{Vect}(u_2)$  dans la base  $\mathcal{B}'$ , dans la base  $\mathcal{B}$  ?

**Exercice 8** – Désignons par  $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$  la base canonique de  $\mathbf{R}^2$ . Commencer par préciser les vecteurs  $e_1$  et  $e_2$ .

1) On considère l'application linéaire  $f$  de  $\mathbf{R}^2$  de matrice  $A$  dans la base  $\mathcal{B}$  :

$$A = \begin{pmatrix} 11 & -4 \\ 30 & -11 \end{pmatrix} \quad .$$

Préciser les vecteurs  $f(e_1), f(e_2), f(2, 5), f(1, 3)$ .

2) On pose  $v_1 = (2, 5)$  et  $v_2 = (1, 3)$ . Montrer que  $\mathcal{B}' = (v_1, v_2)$  est une base de  $\mathbf{R}^2$ . Quelle est

la matrice  $B$  de  $f$  dans cette base ?

3) Quelle est la matrice  $P$  de passage de la base  $\mathcal{B}$  à la base  $\mathcal{B}'$  ?

4) Ecrire la formule reliant  $A$  et  $B$ . Calculer  $P^{-1}$  et vérifier cette formule.

5) Déterminer que  $\text{im} f$  et  $\text{ker} f$ .

**Exercice 9** – (extrait du sujet d'examen 2008) On considère les applications linéaires :

$$\begin{aligned} f : \mathbf{R}^3 &\rightarrow \mathbf{R}^2 & : & (x_1, x_2, x_3) \mapsto (2x_1 - x_3, 3x_1 + x_2 + 2x_3) \\ g : \mathbf{R}^2 &\rightarrow \mathbf{R}^3 & : & (x_1, x_2) \mapsto (x_1 + x_2, -x_2, 2x_1 - x_2) \end{aligned}$$

1) Déterminer la matrice  $A$  de  $f$  dans les bases canoniques de  $\mathbf{R}^3$  et  $\mathbf{R}^2$ . Puis, déterminer la matrice  $B$  de  $g$  dans les bases canoniques de  $\mathbf{R}^2$  et  $\mathbf{R}^3$ .

2) Calculer les matrices  $AB$ ,  $BA$ ,  $(AB)^2$ .

3) Montrer que  $AB$  est une matrice inversible. Préciser  $(AB)^{-1}$ .

4) Expliciter l'application  $(f \circ g)^2$ .

**Exercice 10** – (extrait du sujet d'examen 2008) Notons  $e_1 = (1, 0)$  et  $e_2 = (0, 1)$  les deux vecteurs de la base canonique de  $\mathbf{R}^2$ . Posons  $\epsilon_1 = 3e_1 - 2e_2$  et  $\epsilon_2 = -e_1 + e_2$ .

A1) Expliciter  $\epsilon_1$  et  $\epsilon_2$ . Puis montrer que  $(\epsilon_1, \epsilon_2)$  est une base de  $\mathbf{R}^2$ .

A2) Exprimer le vecteur  $e_1$  (resp.  $e_2$ ), comme combinaison linéaire des vecteurs  $\epsilon_1, \epsilon_2$ .

Soit  $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ , l'application linéaire définie par  $f(\epsilon_1) = \epsilon_1$  et  $f(\epsilon_2) = -\epsilon_2$ .

A3) Préciser la matrice  $A$  de  $f$  dans la base  $(\epsilon_1, \epsilon_2)$ . Calculer  $A^2$ . Que pouvez vous dire de  $f \circ f$  ?

A4) Exprimer le vecteur  $f(e_1)$  (resp.  $f(e_2)$ ), comme combinaison linéaire des vecteurs de  $e_1, e_2$ .

A5) En déduire  $B$  la matrice de  $f$  dans la base  $(e_1, e_2)$ . Quelle est la valeur de la matrice  $B^2$  ?

Soit  $D_1$  la droite vectorielle de  $\mathbf{R}^2$  engendrée par  $\epsilon_1$  et  $D_2$  la droite vectorielle de  $\mathbf{R}^2$  engendrée par  $\epsilon_2$ .

B1) Donner une équation de la droite vectorielle  $D_1$  (resp.  $D_2$ ) de  $\mathbf{R}^2$ .

B2) Montrer que  $D_1$  et  $D_2$  sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires.

B3) Soit  $p$  la projection sur  $D_1$  parallèlement à  $D_2$  et  $s$  la symétrie vectorielle sur  $D_1$  parallèlement à  $D_2$ . Expliciter pour tout  $(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$ , les deux couples de réels  $p(x_1, x_2)$  et  $s(x_1, x_2)$ .

C1) Comparer  $f$  et  $s$ .

**Exercice 11** – (extrait du sujet d'examen 2008) On considère le système de 4 équations à 4 inconnues :

$$(*) \quad \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 & = & 0 \\ x_1 + 2x_3 + x_4 & = & 0 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 3x_4 & = & 0 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 5x_4 & = & 0 \end{cases} .$$

- 1) Les variables  $x_1, x_2, x_3, x_4$  sont ordonnés naturellement. Trianguler ce système d'équations à l'aide de l'algorithme de Gauss. Quelles sont les variables libres de ce système ? Soit  $F$  le sous-espace vectoriel de  $\mathbf{R}^4$  constitué par les solutions du système (\*).
- 2) Résoudre le système (\*) et donner une base de  $F$ . Soit  $v_1 = (1, 1, 1, 1), v_2 = (-1, 0, 1, 2), v_3 = (1, 2, 3, 4), v_4 = (-1, 1, 3, 5)$ . On désigne par  $G$  le sous-espace vectoriel  $\langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle$  de  $\mathbf{R}^4$  engendré par  $v_1, v_2, v_3, v_4$ .
- 3) A l'aide d'un algorithme du cours, donner une base de  $G$  échelonnée par rapport à la base canonique  $\mathcal{B}_4$  de  $\mathbf{R}^4$ .
- 4) Déterminer alors, en suivant par exemple l'algorithme du cours, un système de 2 équations à 4 inconnues dont  $G$  est l'ensemble des solutions.
- 5) Montrer que  $(v_1, v_2)$  est une base de  $G$ . Préciser l'expression de  $v_3$  et  $v_4$  dans la base  $(v_1, v_2)$  de  $G$  (on pourra utiliser les calculs effectués dans la question 3).

On considère l'application linéaire  $f$  de  $\mathbf{R}^4$  vers  $\mathbf{R}^4$  dont la matrice dans la base  $\mathcal{B}_4$  est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} .$$

- 6) Déterminer  $f(e_1), f(e_2), f(e_3), f(e_4)$  les images par  $f$  des vecteurs  $e_1, e_2, e_3, e_4$  de la base canonique  $\mathcal{B}_4$  de  $\mathbf{R}^4$ . En déduire une base de  $\text{Im } f$  l'image de  $f$ .
- 7) Soit  $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbf{R}^4$ , posons  $(y_1, y_2, y_3, y_4) = f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ . Préciser l'expression de  $(y_1, y_2, y_3, y_4)$  à l'aide de  $(x_1, x_2, x_3, x_4)$ .
- 8) Déterminer une base de  $\ker f$  le noyau de  $f$ .
- 9) Montrer que l'intersection de  $\ker f$  et  $\text{Im } f$  est réduite au vecteur nul. En déduire que  $\ker f$  et  $\text{Im } f$  sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires.

### Correction de l'exercice 1

- 1) Ecrivons les éléments de  $\mathbf{R}^4$  et  $\mathbf{R}^2$  en colonne.

On a :

$$f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} .$$

Ainsi, la matrice de  $f$  dans les bases canoniques de  $\mathbf{R}^2$  et  $\mathbf{R}^4$  est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} .$$

- 2) Le noyau de  $f$  est par définition constitué des vecteurs  $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$  de  $\mathbf{R}^4$  tels que  $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$ . Cette équation équivaut à  $(x_1, x_2, x_3, x_4)$  est solution du système :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0 \end{cases} .$$

Ce système a mêmes solutions que le système triangulé pour l'ordre naturel des variables :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ \quad + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases} .$$

Les variables libres de ce système triangulé sont  $x_3$  et  $x_4$ . On obtient en le résolvant :

$$\ker f = \{x_3(1, -2, 1, 0) + x_4(2, -3, 0, 1) \text{ tels que } x_3, x_4 \in \mathbf{R}\} .$$

Nous avons appliqué l'algorithme de résolution. Nous pouvons donc conclure que  $\ker f$  admet pour base le couple de vecteurs de  $\mathbf{R}^4$  :  $(1, -2, 1, 0), (2, -3, 0, 1)$ . L'espace vectoriel  $\ker f$  est donc de dimension 2. Le noyau de  $f$  n'est pas réduit au vecteur nul de  $\mathbf{R}^4$ . Donc  $f$  n'est pas injective.

3) La formule de dimension, nous apprend :

$$\dim \mathbf{R}^4 = \dim \operatorname{Im} f + \dim \ker f .$$

Soit,  $4 = \dim \operatorname{Im} f + 2$ . Ainsi, l'espace vectoriel  $\operatorname{Im} f$  est de dimension 2. Comme il s'agit d'un sous-espace vectoriel de  $\mathbf{R}^2$  qui est aussi de dimension 2, nous avons :  $\operatorname{Im} f = \mathbf{R}^2$ .

L'image de  $f$  coïncide avec  $\mathbf{R}^2$  l'espace but de  $f$ . Donc,  $f$  est surjective.

4) De la surjectivité de  $f$ , il résulte que pour tout  $(y_1, y_2) \in \mathbf{R}^2$ , il existe  $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbf{R}^4$  tels que  $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (y_1, y_2)$ . Fixons  $(y_1, y_2)$ ; les  $(x_1, x_2, x_3, x_4)$  qui conviennent sont les solutions du système :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = y_1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = y_2 \end{cases} .$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = y_1 \\ \quad + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = y_2 - y_1 \end{cases} .$$

Les variables libres de ce système triangulé sont  $x_3$  et  $x_4$ . Ces solutions décrivent l'ensemble :

$$S = \{(y_2 - y_1, 2y_1 - y_2, 0, 0) + x_3(1, -2, 1, 0) + x_4(2, -3, 0, 1) \text{ tels que } x_3, x_4 \in \mathbf{R}\} .$$

Nous obtenons, si nous prenons  $x_3 = x_4 = 0$ , la solution particulière :

$$(y_2 - y_1, 2y_1 - y_2, 0, 0)$$

Ainsi, nous avons montré que le quadruplet de réels  $(y_2 - y_1, 2y_1 - y_2, 0, 0)$  vérifie :

$$f(y_2 - y_1, 2y_1 - y_2, 0, 0) = (y_1, y_2) .$$

## Correction de l'exercice 2

1) La matrice de  $f$  dans la base  $(e_1, e_2, e_3)$  est une matrice carrée à trois lignes, ses colonnes sont

respectivement les coordonnées de  $f(e_1), f(e_2), f(e_3)$  dans la base  $(e_1, e_2, e_3)$ . Cette matrice est donc :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} .$$

La matrice  $A$  donne les les coordonnées de  $f(u)$  dans la base  $\mathcal{B}$ . Ces coordonnées sont :

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 + 4x_3 \\ x_1 - x_2 + x_3 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 \end{pmatrix} .$$

2) En particulier les coordonnées de  $f(e_1 + 2e_2)$  sont :

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} .$$

Ainsi,  $f(e_1 + 2e_2) = 5e_1 - e_2 + 5e_3$ .

3) Considérons un vecteur  $u \in E$  et notons  $(x_1, x_2, x_3)$  ses coordonnées dans la base  $\mathcal{B}$  :  $u = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$ . Le vecteur  $u$  est dans  $\ker f$  si et seulement si  $f(u) = 0$ . Donc, si et seulement si les coordonnées de  $f(u)$  sont nulles, c'est à dire solutions du système linéaire :

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases} .$$

Ce système équivaut à :

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \end{cases} .$$

ou encore au système triangulé (l'ordre des variables est l'ordre naturel) :

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 0 \\ 3x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases} .$$

En résolvant ce système, on trouve que ses solutions sont :

$$S = \{x_3(-2, -1, 1) \text{ tels que } x_3 \in \mathbf{R}\} .$$

$S$  sont les coordonnées des vecteurs de  $\ker f$  Ainsi :

$$\ker f = \{x_3(-2e_1 - e_2 + e_3) \text{ tels que } x_3 \in \mathbf{R}\} .$$

Le noyau de  $f$  est donc un espace vectoriel de dimension 1 de base le vecteur non nul :

$$-2e_1 - e_2 + e_3 .$$

Il résulte de la formule de dimension :

$$3 = \dim E = \dim \operatorname{Im} f + \dim \ker f = \dim \operatorname{Im} f + 1 \quad .$$

Ainsi, l'image de  $f$  est un espace vectoriel de dimension 2. D'après le cours, puisque  $(e_1, e_2, e_3)$  engendrent  $E$ ,  $\operatorname{Im} f$  est engendré par  $f(e_1), f(e_2), f(e_3)$ . Déterminons une base de  $\operatorname{Im} f$  échelonnée dans la base  $(e_1, e_2, e_3)$ .

$$\mathcal{M}_{(e_1, e_2, e_3)}(f(e_1), f(e_2), f(e_3)) = \begin{pmatrix} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad ,$$

$$\mathcal{M}_{(e_1, e_2, e_3)}(f(e_1), f(e_2) - 2f(e_1), f(e_3) - 4f(e_1)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad ,$$

$$\mathcal{M}_{(e_1, e_2, e_3)}(f(e_1), f(e_2) - 2f(e_1), f(e_3) - 4f(e_1) - (f(e_2) - 2f(e_1))) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad .$$

Ainsi,  $\operatorname{Im} f$  admet le couple de vecteurs  $(e_1 + e_2 + e_3, e_2)$  comme base échelonnée relativement à la base  $(e_1, e_2, e_3)$  de  $E$ .

On retrouve de plus que  $f(-2e_1 - e_2 + e_3) = 0$ , c'est à dire que  $-2e_1 - e_2 + e_3 \in \ker f$ .

4) Pour toute application linéaire de source  $E$  :

$$\dim E = \dim \operatorname{Im} f + \dim \ker f \quad .$$

Comme l'espace but de  $f$  est  $E$  ( $f$  est un endomorphisme),  $\operatorname{Im} f$  est aussi un sous-espace vectoriel de  $E$ . Pour démontrer que  $\operatorname{Im} f$  et  $\ker f$  sont des sous-espaces supplémentaires, il suffit de montrer que leur intersection est réduite au vecteur nul.

Déterminons un système d'équations de  $\operatorname{Im} f$  relativement à la base  $(e_1, e_2, e_3)$ . Considérons un vecteur  $u$  de coordonnées  $(x_1, x_2, x_3)$  dans la base  $(e_1, e_2, e_3)$ . Considérons la matrice :

$$\mathcal{M}_{(e_1, e_2, e_3)}(e_1 + e_2 + e_3, e_3, u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x_1 \\ 1 & 1 & x_2 \\ 1 & 0 & x_3 \end{pmatrix} \quad .$$

Suivons l'algorithme qui donne un système d'équations relativement à la base  $(e_1, e_2, e_3)$  de  $\operatorname{Im} f$  qui est l'espace vectoriel engendré par  $(e_1 + e_2 + e_3, e_2)$  :

$$\mathcal{M}_{(e_1, e_2, e_3)}(e_1 + e_2 + e_3, e_2, u - x_1(e_1 + e_2 + e_3)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & x_2 - x_1 \\ 1 & 0 & x_3 - x_1 \end{pmatrix} \quad ,$$

$$\mathcal{M}_{(e_1, e_2, e_3)}(e_1 + e_2 + e_3, e_3, u - x_1(e_1 + e_2 + e_3) - (x_2 - x_1)e_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & x_3 - x_1 \end{pmatrix} .$$

Ainsi,  $u \in \text{Im } f$  si et seulement si ses coordonnées  $(x_1, x_2, x_3)$  dans la base  $(e_1, e_2, e_3)$  vérifient :

$$x_1 - x_3 = 0 .$$

Il est facile maintenant de montrer que  $\text{Im } f \cap \ker f = \{0\}$ . En effet si  $u \in \ker f$ , il existe un réel  $a$  tel que  $u = a(-2e_1 - e_2 + e_3)$ . Les coordonnées de  $u$  dans la base  $(e_1, e_2, e_3)$  sont donc  $(-2a, -a, a)$ . Ce vecteur est dans  $\text{Im } f$  si et seulement si :

$$-2a - (-a) = 0 .$$

Il vient  $a = 0$ , donc  $u = 0$ . Ainsi,  $\text{Im } f \cap \ker f = \{0\}$  et  $\text{Im } f$  et  $\ker f$  sont des sous-espaces supplémentaires de  $E$ .

5) La matrice de  $f^2$  dans la base  $\mathcal{B}$  est :

$$A^2 = AA = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 12 & 18 \\ -3 & -3 & -9 \\ 3 & 12 & 18 \end{pmatrix}$$

On en déduit :

$$f^2(e_1) = 3e_1 - 3e_2 + 3e_3, \quad f^2(e_2) = 12e_1 - 3e_2 + 12e_3, \quad f^2(e_3) = 18e_1 - 9e_2 + 18e_3 .$$

### Correction de l'exercice 3

1) La matrice  $M$  est la matrice de  $f$  dans la base  $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$  (noter que cela sous-entend que la base de départ est aussi la base d'arrivée). Les coordonnées de  $f(e_1)$  dans la base  $\mathcal{B}$  sont données par la première colonne de  $M$ , ainsi  $(1, 1)$  sont donc les coordonnées de  $f(e_1)$  dans la base  $\mathcal{B}$ . De même, les coordonnées de  $f(e_2)$  dans la base  $\mathcal{B}$  sont données par la deuxième colonne de  $M$  et  $(2, 2)$  sont donc les coordonnées de  $f(e_2)$  dans la base  $\mathcal{B}$ . Il en résulte :

$$f(e_1) = e_1 + e_2 \quad \text{et} \quad f(e_2) = 2e_1 + 2e_2 .$$

Les coordonnées de  $ae_1 + 17e_2$  dans la base  $\mathcal{B}$  sont  $(a, 17)$ , il en résulte que les coordonnées de  $f(ae_1 + 17e_2)$  dans la base  $\mathcal{B}$  sont :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ 17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + 34 \\ a + 34 \end{pmatrix} \quad \text{d'où} \quad f(ae_1 + 17e_2) = (a+34)e_1 + (a+34)e_2 = (a+34)(e_1 + e_2) .$$

2) Soit  $u$  de coordonnées  $(x_1, x_2)$  dans la base  $\mathcal{B}$ . Le vecteur  $u$  est dans  $\ker f$  si et seulement si  $f(u) = 0$ , donc si et seulement si les coordonnées de  $f(u)$  sont nulles :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ x_1 + 2x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Cela équivaut au fait que  $(x_1, x_2)$  soit solution de l'équation linéaire  $x_1 + 2x_2 = 0$ . Les solutions de cette équation sont  $\{x_2(-2, 1) \text{ tels que } x_2 \in \mathbf{R}\}$ . Il en résulte :

$$\ker f = \{x_2(-2e_1 + e_2) \text{ tels que } x_2 \in \mathbf{R}\} = \text{Vect}(-2e_1 + e_2) \quad .$$

Comme  $-2e_1 + e_2$  est non nul, la famille réduite à ce vecteur est libre et  $-2e_1 + e_2$  est une base de  $\ker f$ .

Le sous-espace vectoriel  $\text{Im} f$  est engendré par les deux vecteurs  $f(e_1), f(e_2)$ . Ainsi :

$$\text{Im} f = \text{Vect}(f(e_1), f(e_2)) = \text{Vect}(e_1 + e_2, 2e_1 + 2e_2) \quad .$$

On peut pour avancer utiliser trois méthodes. L'algorithme du cours qui dit :

$$M_{\mathcal{B}}(e_1 + e_2, 2e_1 + 2e_2) = M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \text{Im} f = \text{Vect}(e_1 + e_2, 2e_1 + 2e_2)$$

$$M_{\mathcal{B}}(e_1 + e_2, 2e_1 + 2e_2 - 2(e_1 + e_2)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \text{Im} f = \text{Vect}(e_1 + e_2, 0) = \text{Vect}(e_1 + e_2) \quad .$$

Comme  $e_1 + e_2$  est non nul, la famille réduite à ce vecteur est libre et  $e_1 + e_2$  est une base de  $\text{Im} f$ .

Deuxièmement, on aurait pu aussi noter que  $2e_1 + 2e_2 = 2(e_1 + e_2)$ . Il est alors clair que

$$\text{Vect}(e_1 + e_2, 2e_1 + 2e_2) = \text{Vect}(e_1 + e_2) \quad .$$

On termine alors comme au-dessus.

3) Comme  $E$  est de dimension 2, pour montrer que  $(u, v)$  est une base de  $E$ , il suffit de montrer que la matrice :

$$M_{\mathcal{B}}(u, v) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

est inversible. Son déterminant est non nul, car égal à 3, d'où le résultat. Pour déterminer la matrice de  $f$  dans la base  $\mathcal{B}' = (u, v)$ , donnons deux méthodes :

a) Les coordonnées de  $u$  dans la base  $\mathcal{B}$  sont  $(2, -1)$ , il en résulte que les coordonnées de  $f(u)$  dans cette même base sont :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{d'où} \quad f(u) = 0 = 0u + 0v \quad .$$

De même les coordonnées de  $v$  dans la base  $\mathcal{B}$  sont  $(1, 1)$ , il en résulte que les coordonnées de  $f(v)$  dans cette même base sont :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{d'où} \quad f(v) = 3e_1 + 3e_2 = 3(e_1 + e_2) = 3v = 0u + 3v \quad .$$

Par définition de la matrice de  $f$  dans la base  $(u, v)$ , on obtient :

$$M(f, (u, v)) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad .$$

b) La matrice de passage de la base  $\mathcal{B}$  à la base  $\mathcal{B}'$  est la matrice :

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} .$$

Son inverse se détermine par le calcul du déterminant et de la comatrice. On obtient :

$$P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} .$$

On sait alors que la matrice  $B$  de  $f$  dans la base  $\mathcal{B}'$  est donnée par la formule :

$$B = P^{-1}MP = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} .$$

4) On a toujours :  $\dim E = \dim \ker f + \dim \operatorname{Im} f$ . Pour montrer que  $\ker f$  et  $\operatorname{Im} f$  sont des sous-espaces supplémentaires, il suffit alors de montrer  $\ker f \cap \operatorname{Im} f = \{0\}$ . Soit  $u \in \operatorname{Im} f$ , il existe alors  $\lambda \in \mathbf{R}$  tel que  $u = \lambda(e_1 + e_2)$ . Si  $u$  appartient de plus à  $\ker f$  ses coordonnées  $(\lambda, \lambda)$  dans la base  $\mathcal{B}$  vérifient alors l'équation de  $\ker f$ . On en déduit :  $\lambda + 2\lambda = 0$ . D'où  $\lambda = 0$  et  $u = 0$ . Ainsi,  $\ker f \cap \operatorname{Im} f = \{0\}$ .

#### Correction de l'exercice 4

1)  $\mathbf{R}^2$  est de dimension 2.  $(e_1, e_2)$  est une base de  $\mathbf{R}^2$  si et seulement si la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} .$$

est inversible. C'est le cas puisque son déterminant est non nul, car gal à 1.

2) La matrice de  $f$  dans la base  $(e_1, e_2)$  est par définition

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} .$$

3) Soit  $(Y_1, Y_2)$  les coordonnées de  $f(u)$  dans la base  $(e_1, e_2)$ , on a :

$$\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_2 \\ 2X_1 + 2X_2 \end{pmatrix} .$$

4) La matrice de passage de la base canonique de  $\mathbf{R}^2$  à la base  $(e_1, e_2)$  est :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} .$$

Son inverse est :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} .$$

Si  $A$  est la matrice de  $f$  dans la base canonique de  $\mathbf{R}^2$  :

$$B = P^{-1}AP \quad ; \quad A = PBP^{-1} .$$

On obtient :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} .$$

On trouve  $A = B$ , pur hasard !

### Correction de l'exercice 5

1) On observe que :

$$f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} .$$

Ainsi, la matrice de  $f$  dans les bases canoniques de  $\mathbf{R}^4$  et  $\mathbf{R}^3$  est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} .$$

Les vecteurs cherchés ont pour coordonnées dans la base canonique de  $\mathbf{R}^3$  les colonnes de la matrice  $A$ . Ceux sont donc les colonnes de  $A$ .

$$f(e_1) = f(1, 0, 0, 0) = (1, 2, 1) , f(e_2) = f(0, 1, 0, 0) = (1, 1, -1)$$

$$f(e_3) = f(0, 0, 1, 0) = (1, -1, 1) , f(e_4) = f(0, 0, 0, 1) = (1, 1, -1)$$

2) Appliquons l'algorithme du cours, le point de départ est :

$$\mathcal{M}_{B'}(f(e_1), f(e_2), f(e_3), f(e_4)) = A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Posons  $u'_1 = f(e_1)$ ,  $u'_2 = f(e_2) - f(e_1)$ ,  $u'_3 = f(e_3) - f(e_1)$ ,  $u'_4 = f(e_4) - f(e_1)$ , on a :

$$\text{Vect}(f(e_1), f(e_2), f(e_3), f(e_4)) = \text{Vect}(u'_1, u'_2, u'_3, u'_4) \text{ et } A(u'_1, u'_2, u'_3, u'_4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -3 & -1 \\ 1 & -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Posons  $u''_1 = u'_1$ ,  $u''_2 = u'_2$ ,  $u''_3 = u'_3 - 3u'_2$ ,  $u''_4 = u'_4 - u'_2$ , on a :

$$\text{Vect}(f(e_1), f(e_2), f(e_3), f(e_4)) = \text{Vect}(u''_1, u''_2, u''_3, u''_4) \text{ et } A(u''_1, u''_2, u''_3, u''_4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

Comme  $u''_4 = 0$ , on a  $\text{Vect}(f(e_1), f(e_2), f(e_3), f(e_4)) = \text{Vect}(u''_1, u''_2, u''_3)$ . Comme les vecteurs  $u''_1, u''_2, u''_3$  sont échelonnés par rapport à la base canonique de  $\mathbf{R}^3$ ,  $(u''_1, u''_2, u''_3)$  est donc une base

de l'espace vectoriel  $\text{Vect}(f(e_1), f(e_2), f(e_3), f(e_4))$ .

3) L'image de  $f$  n'est autre que  $\text{Vect}(f(e_1), f(e_2), f(e_3), f(e_4))$ . Il en résulte que l'image de  $f$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbf{R}^3$  de dimension 3. Or,  $\mathbf{R}^3$  lui-même est de dimension 3, donc l'image de  $f$  est égal à  $\mathbf{R}^3$  et  $f$  est surjective. Comme  $f$  est une application linéaire de source un espace vectoriel de dimension 4, on a :

$$4 = \dim(\ker f) + \dim(\text{im } f)$$

Il en résulte que le noyau de  $f$  est de dimension 1. Le noyau de  $f$  est donc une droite vectorielle de  $\mathbf{R}^4$ .

4) L'algorithme donne  $u_4'' = 0$ , c'est à dire :  $u_4' - u_2' = 0$ , soit :

$$f(e_2) - f(e_1) - (f(e_4) - f(e_1)) = 0$$

Il vient  $f(e_2) - f(e_4) = 0$ , c'est à dire  $f(e_2 - e_4) = 0$ . Ainsi,  $e_2 - e_4 = (0, 1, 0, -1)$  est un vecteur du noyau de  $f$ . Ce vecteur est non nul, c'est donc une famille libre à un élément de  $\ker f$ . Comme  $\ker f$  est de dimension 1,  $e_2 - e_4 = (0, 1, 0, -1)$  est une base de  $\ker f$ . On peut vérifier ce résultat en résolvant le système :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & = & 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 & = & 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 & = & 0 \end{cases}$$

dont les solutions sont justement les éléments du noyau de  $f$ .

**Correction de l'exercice 6** 1) On a  $u_1 = e_1 + 2e_2$  et  $u_2 = e_1 + 3e_2$ . La matrice

$$\mathcal{M}_{(e_1, e_2)}(u_1, u_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} .$$

qui est inversible, car de déterminant non nul. Il en résulte que  $(u_1, u_2)$  est une base de  $\mathbf{R}^2$ .

2) Les coordonnées de  $f(u_1)$  et  $f(u_2)$  dans la base  $(e_1, e_2)$  sont respectivement :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -6 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -6 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} .$$

Ainsi,  $f(u_1) = 0$  et  $f(u_2) = e_1 + 3e_2 = u_2$ . La matrice  $B$  de  $f$  dans la base  $(u_1, u_2)$  est donc :

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

3) Soit  $P$  la matrice de passage de la base  $(e_1, e_2)$  à la base  $(u_1, u_2)$  :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} .$$

La matrice de passage de la base  $(u_1, u_2)$  à la base  $(e_1, e_2)$  est la matrice :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} .$$

Le lien entre  $A$ ,  $B$  et  $P$  est :

$$B = P^{-1}AP \quad .$$

Cette identité peut donner une deuxième manière de calculer  $B$ .

**Correction de l'exercice 7** 1) La dimension de  $\mathbf{R}^2$  comme  $\mathbf{R}$ -espace vectoriel est 2. Pour montrer que  $(u_1, u_2)$  est une base de  $\mathbf{R}^2$ , il suffit donc de montrer que la matrice :

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}(u_1, u_2)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

est inversible. C'est le cas, puisqu'elle est de déterminant  $-1$ .

Autre méthode : vu la dimension de  $\mathbf{R}^2$ , il suffit de montrer que la famille  $(u_1, u_2)$  est libre. Soit  $a, b \in \mathbf{R}$  tels que  $au_1 + bu_2 = 0$ . On obtient :

$$au_1 + bu_2 = a(1, 4) + b(1, 3) = (a + b, 4a + 3b) = (0, 0)$$

Ainsi,  $(a, b)$  est solution du système :

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ 4a + 3b = 0 \end{cases} \quad .$$

On en déduit  $a = b = 0$ . Cela prouve que  $(u_1, u_2)$  est une famille libre, donc une base de  $\mathbf{R}^2$ .

2) Puisque  $A$  est la matrice  $f$  dans la base canonique de  $\mathbf{R}^2$ :  $f(e_1) = (-7, -24)$  et  $f(e_2) = (2, 7)$ . La matrice de  $f^2$  dans la base  $\mathcal{B}$  est :

$$A^2 = \begin{pmatrix} -7 & 2 \\ -24 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -7 & 2 \\ -24 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi,  $f^2$  et  $\text{Id}_{\mathbf{R}^2}$  ont la même matrice dans la base  $\mathcal{B}$ . Ces applications linéaires sont donc égales :  $f^2 = \text{Id}_{\mathbf{R}^2}$ .

3) Les coordonnées de  $f(u_1)$  et  $f(u_2)$  dans la base  $\mathcal{B}$  sont respectivement:

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 2 \\ -24 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 2 \\ -24 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Ainsi,  $f(u_1) = e_1 + 4e_2 = u_1$  et  $f(u_2) = -e_1 - 3e_2 = -u_2$ . La matrice  $B$  de  $f$  dans la base  $\mathcal{B}'$  est :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad .$$

4) La matrice de passage de la base  $\mathcal{B}$  à la base  $\mathcal{B}'$  est :

$$P = \mathcal{M}_{\mathcal{B}(u_1, u_2)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

La matrice de passage de la base  $\mathcal{B}'$  à la base  $\mathcal{B}$  est :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \quad .$$

Ainsi,  $e_1 = 3u_1 + 4u_2$  et  $e_2 = u_1 - u_2$ . On peut retrouver ce résultat en résolvant le système linéaire vectoriel :

$$\begin{cases} e_1 + 4e_2 = u_1 \\ e_1 + 3e_2 = u_2 \end{cases} .$$

On obtient en le résolvant comme un système linéaire à coefficients réels :  $e_2 = u_1 - u_2$  et  $e_1 = 4u_2 - 3u_1$ . Les coordonnées des vecteurs  $e_1$  et  $e_2$  dans la base  $(u_1, u_2)$  sont respectivement  $(-3, 4)$  et  $(1, -1)$ .

On a :

$$B = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -7 & 2 \\ -24 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} .$$

5) Comme  $\dim \mathbf{R}^2 = 2 = \dim \text{Vect}(u_1) + \dim \text{Vect}(u_2)$ , pour montrer que  $\text{Vect}(u_1)$  et  $\text{Vect}(u_2)$  sont supplémentaires, il suffit de voir que  $\mathbf{R}^2 = \text{Vect}(u_1) + \text{Vect}(u_2)$ . Cela résulte du fait que  $(u_1, u_2)$  est une base de  $\mathbf{R}^2$ . Par définition de la symétrie  $s : s(u_1) = u_1$  et  $s(u_2) = -u_2$ . Ainsi,  $f$  et  $s$  sont deux applications linéaires qui prennent les mêmes valeurs sur les vecteurs  $u_1, u_2$  d'une base de  $\mathbf{R}^2$ . Elles sont donc égales :  $f = s$  et  $f$  est la symétrie vectorielle par rapport à  $\text{Vect}(u_1)$  parallèlement à  $\text{Vect}(u_2)$ .

6) Par définition de la projection  $p : p(u_1) = u_1$  et  $p(u_2) = 0$ . Ainsi, la matrice de  $p$  dans la base  $\mathcal{B}'$  est :

$$\mathcal{M}(p, \mathcal{B}') = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

D'autre part :

$$p(e_1) = p(4u_2 - 3u_1) = 4p(u_2) - 3p(u_1) = -3p(u_1) = (-3, -12) ,$$

$$p(e_2) = p(u_1 - u_2) = p(u_1) = (1, 4) .$$

Il en résulte :

$$\mathcal{M}(p, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -12 & 4 \end{pmatrix} .$$

On pourrait aussi utiliser les matrices de passage pour déduire cette matrice de la matrice de  $p$  dans la base  $\mathcal{B}'$ .

### Correction de l'exercice 8

0)  $e_1 = (1, 0)$  et  $e_2 = (0, 1)$ .

1) Les coordonnées de  $f(e_1)$  dans la base canonique sont données par la première colonne de  $A$ . Ainsi,  $f(e_1) = 11e_1 + 30e_2 = (11, 30)$ . De même, on obtient,  $f(e_2) = (-4, -11)$ . Le vecteur  $(2, 5)$  de  $\mathbf{R}^2$  a pour coordonnées  $(2, 5)$  dans la base canonique. Dans cette base, les coordonnées de  $f(2, 5)$  sont donc :

$$A \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & -4 \\ 30 & -11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} .$$

Ainsi,  $f(2, 5) = (2, 5)$ . De même, les coordonnées de  $f(1, 3)$  dans la base  $\mathcal{B}$  sont :

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & -4 \\ 30 & -11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix} .$$

Ainsi,  $f(1, 3) = -(1, 3)$ .

2) Comme  $\mathbf{R}^2$  est un  $\mathbf{R}$ -espace vectoriel de dimension 2, pour montrer que  $(v_1, v_2)$  est une base de  $\mathbf{R}^2$ , il suffit de montrer qu'il s'agit d'une famille libre. Soit  $a, b$  deux réels, supposons :

$$av_1 + bv_2 = 0 \quad .$$

On obtient :

$$\begin{cases} 2a + b = 0 \\ 5a + 3b = 0 \end{cases} .$$

On en déduit :  $a = b = 0$ . Ainsi, la famille  $(v_1, v_2)$  est bien libre. Comme  $f(v_1) = v_1 = 1v_1 + 0v_2$  et  $f(v_2) = -v_2 = 0v_1 + (-1)v_2$ , la matrice  $B$  est :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} .$$

3) Par définition, cette matrice de passage est :

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} .$$

Des équations entre vecteurs :

$$\begin{cases} 2e_1 + 5e_2 = v_1 \\ e_1 + 3e_2 = v_2 \end{cases} .$$

On déduit :  $e_1 = 3v_1 - 5v_2$  et  $e_2 = -v_1 + 2v_2$ . Il en résulte :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} .$$

On pourrait calculer  $P^{-1}$  en calculant le déterminant et la comatrice de  $P$ .

4) La formule est  $B = P^{-1}AP$ . Le lecteur vérifiera (vraiment) que :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11 & -4 \\ 30 & -11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} .$$

5) Le vecteur  $u$  de coordonnées  $(x_1, x_2)$  dans la base  $\mathcal{B}$  appartient à  $\ker f$  si et seulement si les coordonnées de  $f(u)$  dans cette base sont nulles, donc si et seulement si :

$$\begin{pmatrix} 11 & -4 \\ 30 & -11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11x_1 - 4x_2 \\ 30x_1 - 11x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Le système :

$$\begin{cases} 11x_1 - 4x_2 = 0 \\ 30x_1 - 11x_2 = 0 \end{cases} .$$

équivalent à :

$$\begin{cases} 11x_1 - 4x_2 = 0 \\ -x_2 = 0 \end{cases} .$$

Le couple  $(0,0)$  est la seule solution de ce système. Ainsi,  $\ker f = \{0\}$  et  $f$  est injective. L'application linéaire  $f$  est un endomorphisme (linéaire avec même source et même but). Comme elle est injective, le cours nous apprend qu'elle est bijective, donc surjective. Ainsi,  $\text{im} f = \mathbf{R}^2$ .

### Correction de l'exercice 9

1) On trouve :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

2) On trouve :

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ -3 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & -4 \end{pmatrix}.$$

$$(AB)^2 = (AB)(AB) = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 7 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 7 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 & 0 \\ 0 & 21 \end{pmatrix} = 21\text{Id}_2.$$

3) On déduit de la dernière égalité :

$$(AB)\left(\frac{1}{21}AB\right) = \left(\frac{1}{21}AB\right)AB = \frac{1}{21}(AB)^2 = \frac{1}{21}(21\text{Id}_2) = \text{Id}_2$$

Donc, la matrice  $AB$  est inversible et :

$$(AB)^{-1} = \frac{1}{21}(AB) = \begin{pmatrix} 0 & 3/21 \\ 7/21 & 0 \end{pmatrix}.$$

4)  $(f \circ g)^2$  a pour matrice  $(AB)^2$  dans la base canonique de  $\mathbf{R}^2$ . Ainsi,  $(f \circ g)^2$  et  $21\text{Id}_{\mathbf{R}^2}$  ont même matrice dans la base canonique de  $\mathbf{R}^2$ . On en déduit  $(f \circ g)^2 = 21\text{Id}_{\mathbf{R}^2}$ .

### Correction de l'exercice 10

A1) On a :

$$\epsilon_1 = 3e_1 - 2e_2 = 3(1,0) - 2(0,1) = (3,-2).$$

De même :

$$\epsilon_2 = -e_1 + e_2 = -(1,0) + (0,1) = (-1,1).$$

Nous savons qu'une famille libre à deux éléments d'un espace vectoriel de dimension 2 est une base. Ainsi, pour montrer que  $(\epsilon_1, \epsilon_2)$  est une base de  $\mathbf{R}^2$ , il suffit de montrer que c'est une famille libre. Pour ce faire, soit  $a, b$  deux réels tels que  $a\epsilon_1 + b\epsilon_2 = 0$ ; il vient :

$$a(3,-2) + b(-1,1) = (0,0).$$

D'où :

$$\begin{cases} 3a - b = 0 \\ -2a + b = 0 \end{cases} .$$

Ajoutons les deux équations, on obtient :  $a = 0$ . D'où,  $b = 0$ . Cela montre que la famille  $(\epsilon_1, \epsilon_2)$  est une famille libre de  $\mathbf{R}^2$ .

A2) On a :

$$\begin{cases} \epsilon_1 = 3e_1 - 2e_2 \\ \epsilon_2 = -e_1 + e_2 \end{cases} .$$

D'où :

$$\begin{cases} \epsilon_1 = 3e_1 - 2e_2 \\ 2\epsilon_2 = -2e_1 + 2e_2 \end{cases} .$$

Soit en ajoutant :  $e_1 = \epsilon_1 + 2\epsilon_2$  .

On a également :

$$\begin{cases} \epsilon_1 = 3e_1 - 2e_2 \\ 3\epsilon_2 = -3e_1 + 3e_2 \end{cases} .$$

Soit en ajoutant :  $e_2 = \epsilon_1 + 3\epsilon_2$ .

A3) Puisque  $f(\epsilon_1) = \epsilon_1$  et  $f(\epsilon_2) = -\epsilon_2$ , par définition de la matrice d'un endomorphisme dans une base, on obtient :

$$A = \mathcal{M}(f, (\epsilon_1, \epsilon_2)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} .$$

On en déduit :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \text{Id}_2 .$$

Il en résulte que  $f^2$  et  $\text{Id}_{\mathbf{R}^2}$  ont la même matrice dans la base  $(\epsilon_1, \epsilon_2)$ . Ces applications linéaires sont donc égales :  $f^2 = \text{Id}_{\mathbf{R}^2}$ .

A4) On a :

$$f(e_1) = f(\epsilon_1 + 2\epsilon_2) = f(\epsilon_1) + 2f(\epsilon_2) = \epsilon_1 - 2\epsilon_2 = 3e_1 - 2e_2 - 2(-e_1 + e_2) = 5e_1 - 4e_2$$

De même :

$$f(e_2) = f(\epsilon_1 + 3\epsilon_2) = f(\epsilon_1) + 3f(\epsilon_2) = \epsilon_1 - 3\epsilon_2 = 3e_1 - 2e_2 - 3(-e_1 + e_2) = 6e_1 - 5e_2$$

A5) Il en résulte :

$$B = \mathcal{M}(f, (e_1, e_2)) = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -4 & -5 \end{pmatrix} .$$

On vérifie que  $B^2 = \text{Id}_2$ .

B1) L'algorithme du cours montre que  $y + \frac{3}{2}x = 0$  est une équation de  $D_1$ . De même,  $y + x = 0$  est une équation de  $D_2$ .

B2) Comme la dimension de  $\mathbf{R}^2$  est la somme des dimensions de  $D_1$  et  $D_2$ , pour démontrer que  $D_1$  et  $D_2$  sont en somme directe, il suffit de montrer que  $D_1 \cap D_2 = \{0\}$ . Pour ce faire, soit  $u = (x, y) \in D_1 \cap D_2$ . Comme  $u \in D_1$ , il existe  $a \in \mathbf{R}$  tel que  $u = a(3, -2) = (3a, -2a)$ . Comme  $u \in D_2$  :  $3a - 2a = 0$ . Soit  $a = 0$  et  $u = 0$ . Ainsi :

$$\mathbf{R}^2 = D_1 \oplus D_2 \quad .$$

B3) Ainsi, tout  $u = (x, y) \in \mathbf{R}^2$  s'écrit de façon unique :  $u = u_1 + u_2$  avec  $u_1 \in D_1$  et  $u_2 \in D_2$ . Traduisons que  $u_1 \in D_1$  : il existe  $a \in \mathbf{R}$  tel que  $u_1 = a(3, -2) = (3a, -2a)$ . Il vient  $u_2 = (x - 3a, y + 2a)$ . Traduisons que  $u_2 \in D_2$  : il vient  $x - 3a + y + 2a = 0$ . Soit,  $a = x + y$ . Ainsi :

$$u_1 = (x + y)(3, -2) = (3x + 3y, -2x - 2y) \quad ; \quad u_2 = (-2x - 3y, 2x + 3y)$$

Par définition de  $p$  et  $s$  :

$$p(x, y) = u_1 = (3x + 3y, -2x - 2y) \text{ et } s(x, y) = u_1 - u_2 = (5x + 6y, -4x - 5y) \quad .$$

C1) La matrice de  $s$  dans la base canonique de  $\mathbf{R}^2$  est donc :

$$\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -4 & -5 \end{pmatrix} \quad .$$

Ainsi  $f$  et  $s$  ont même matrice dans la base canonique de  $\mathbf{R}^2$ . On a donc  $f = s$ . On aurait pu remarquer aussi que la matrice de  $s$  dans la base  $(\epsilon_1, \epsilon_2)$  est la matrice  $A$ . On conclurait de même que  $f = s$ .

### Correction de l'exercice 11

1) Les différentes étapes de l'algorithme de Gauss sont :

Etape 1 :

$$(*) \quad \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ 2x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 0 \\ 3x_2 + 3x_3 + 6x_4 = 0 \end{cases} \quad .$$

Etape 2 :

$$(*) \quad \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases} \quad .$$

Ce système est triangulé. Les variables libres sont  $x_3$  et  $x_4$ .

2) Le système  $(*)$  a mêmes solutions que le système triangulé précédent. Suivons la méthode du cours, les solutions s'expriment à l'aide des variables libres. La dernière équation donne :

$$x_2 = -x_3 - 2x_4 \quad .$$

En remplaçant dans la première équation, on obtient :

$$x_1 = x_2 - x_3 + x_4 = (-x_3 - 2x_4) - x_3 + x_4 = -2x_3 - x_4 \quad .$$

Ainsi, l'ensemble  $F$  des solutions de  $(*)$  est :

$$\begin{aligned} F &= \{(-2x_3 - x_4, -x_3 - 2x_4, x_3, x_4) ; x_3, x_4 \in \mathbf{R}\} \\ &= \{x_3(-2, -1, 1, 0) + x_4(-1, -2, 0, 1) ; x_3, x_4 \in \mathbf{R}\} \quad . \end{aligned}$$

La famille  $\mathcal{B} = ((-2, -1, 1, 0), (-1, -2, 0, 1))$  est une base de  $F$ .

3) Partons de la matrice  $M(v_1, v_2, v_3, v_4)$  dont les colonnes sont les coordonnées des vecteurs  $v_i$  dans la base canonique de  $\mathbf{R}^4$  :

$$M(v_1, v_2, v_3, v_4) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} \quad .$$

Posons  $v'_2 = v_1 + v_2$ ,  $v'_3 = v_3 - v_1$  et  $v'_4 = v_1 + v_4$  :

$$M(v_1, v'_2, v'_3, v'_4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 3 & 6 \end{pmatrix} \quad .$$

On remarque que  $v''_3 = v'_3 - v'_2 = 0$  et  $v''_4 = v'_4 - 2v'_2 = 0$ . L'algorithme se termine :

$$M(v_1, v'_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad .$$

Il en résulte que la famille  $(v_1, v'_2)$  est une base de  $G$ . Notons que  $v_1 = (1, 1, 1, 1)$  et  $v'_2 = (0, 1, 2, 3)$ . On observe que  $v''_3 = v''_4 = 0$  se traduit par :

$$v_3 - 2v_1 - v_2 = 0 \quad \text{et} \quad v_4 - v_1 + 2v_2 = 0 \quad .$$

4) La famille  $(v_1, v'_2)$  étant échelonnée, pour obtenir un système d'équations de  $G$ , on considère  $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$  et la matrice :

$$M(v_1, v'_2, x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x_1 \\ 1 & 1 & x_2 \\ 1 & 2 & x_3 \\ 1 & 3 & x_4 \end{pmatrix} \quad .$$

Posons  $x' = x - x_1 v_1$  :

$$M(v_1, v'_2, x') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & x_2 - x_1 \\ 1 & 2 & x_3 - x_1 \\ 1 & 3 & x_4 - x_1 \end{pmatrix} \quad .$$

Posons  $x'' = x' - (x_2 - x_1)v_2' = x - x_1v_1 - (x_2 - x_1)v_2'$  :

$$M(v_1, v_2', x'') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & x_3 - x_1 - 2(x_2 - x_1) \\ 1 & 3 & x_4 - x_1 - 3(x_2 - x_1) \end{pmatrix} .$$

Un système d'équations de  $G$  est alors :

$$(**) \quad \begin{cases} x_3 - 2x_2 + x_1 - x_4 = 0 \\ x_4 + 2x_1 - 3x_2 = 0 \end{cases}$$

4) L'espace vectoriel  $G$  est de dimension 2, les vecteurs  $v_1$  et  $v_2$  sont dans  $G$  pour démontrer que  $(v_1, v_2)$  est une base de  $G$ , il suffit donc de montrer que  $(v_1, v_2)$  est une famille libre. Montrons cela. Soit  $a, b$  deux réels tels que  $av_1 + bv_2 = 0$ . Comme  $av_1 + bv_2 = (a - b, a, a + b, a + 2b)$ , il vient  $a = 0$ , puis  $b = 0$ .

5) On pourra noter que d'après la question précédente :

$$v_3 = 2v_1 + v_2 \quad \text{et} \quad v_4 = v_1 - 2v_2 .$$

6) Les vecteurs  $f(e_1), f(e_2), f(e_3), f(e_4)$  sont les colonnes de la matrice  $A$ . On constate ainsi que :

$$f(e_1) = v_1, \quad f(e_2) = v_2, \quad f(e_3) = v_3, \quad f(e_4) = v_4 .$$

Comme  $\text{Im } f$  est l'espace vectoriel engendré par  $f(e_1), f(e_2), f(e_3), f(e_4)$ , on obtient  $\text{Im } f = G$ . Il résulte alors de la question 4 que  $(v_1, v_2)$  est une base de  $\text{Im } f$ .

7) Par définition de  $A$ , si  $(y_1, y_2, y_3, y_4) = f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ , on a :

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

Il en résulte :

$$\begin{cases} y_1 = x_1 - x_2 + x_3 - x_4 \\ y_2 = x_1 + 2x_3 + x_4 \\ y_3 = x_1 + x_2 + 3x_3 + 3x_4 \\ y_4 = x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 5x_4 \end{cases} .$$

8) On constate que le noyau de  $f$  est constitué des solutions du système (\*). D'après la question 2, la famille  $\mathcal{B} = ((-2, -1, 1, 0), (-1, -2, 0, 1))$  est une base de  $\ker f$ .

9) L'application  $f$  étant linéaire de source  $\mathbf{R}^4$ , nous savons :

$$\dim \mathbf{R}^4 = \dim \ker f + \dim \text{Im } f .$$

Pour démontrer que  $\ker f$  et  $\text{Im } f$  sont supplémentaires, il suffit de montrer que  $\ker f \cap \text{Im } f = \{0\}$ . Soit  $u \in \ker f$ , il existe alors deux réels  $a$  et  $b$  tels que :

$$u = a(-2, -1, 1, 0) + b(-1, -2, 0, 1) = (-2a - b, -a - 2b, a, b) .$$

Si  $u \in \text{Im } f$ , il vérifie les équations de  $\text{Im } f$  et on a :

$$(*) \quad \begin{cases} a - 2(-a - 2b) + (-2a - b) = 0 \\ b + 2(-2a - b) - 3(-a - 2b) = 0 \end{cases} .$$

D'où :

$$\begin{cases} a + 3b = 0 \\ -a + 5b = 0 \end{cases} .$$

On en déduit  $a = b = 0$ . Ainsi,  $\ker f \cap \text{Im } f = \{0\}$  et finalement :

$$\mathbf{R}^4 = \ker f \oplus \text{Im } f \quad .$$